辛丑年高三数学习题集

慈溪中学 2019 级

2022 年 1 月 31 日

目录

扫一扫，看解析

题目

选择题

1. 设单调递增函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 均有 $a\in\{f(a+1)\}\cup\{f(f(a+2))\}$, 则

A. $2f(1)\leqslant 1$　　B. $2f(1)\geqslant -1$　　C. $f(0)+f(1)\leqslant 0$　　D. $f(0)+f(1)\geqslant -1$

2. 已知对任意单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$, 总存在 $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\{-1,1\}$, 使得 $|\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2+\mu_3\boldsymbol{e}_3|\geqslant M$, 设 $M_{\mathrm{P}},M_{\mathrm{S}}$ 分别表示 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是平面向量和空间向量时 M 的最大值, 则

A. $M_{\mathrm{P}}=\sqrt{2}+1$　　B. $M_{\mathrm{P}}=\sqrt{3}+1$　　C. $M_{\mathrm{S}}=\sqrt{2}$　　D. $M_{\mathrm{S}}=\sqrt{3}$

3. 已知实数 a,b,c, 则

A. 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2+c|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

B. 若 $|a^2+b+c|+|a^2+b-c|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

C. 若 $|a+b+c^2|+|a+b-c^2|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

D. 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2-c|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

填空题

1. 已知 $a>0$, 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+(2+2a)x, & 0<x<a+2,\\ ax, & x\geqslant a+2,\end{cases}$ 存在 x_0 满足 $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$, 且 $f\left(x_0\right)\neq x_0$, 则 a 的取值范围是 __________.

2. 已知空间单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4|=2\left|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4\right|=1$, 则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3$ 的最小值是 __________, 最大值是 __________.

3. 已知正实数 $x,y,z>0$, 则 $A=\max\left\{x,\dfrac{1}{y}\right\}+\max\left\{y,\dfrac{2}{x}\right\}$ 的最小值是 ________,$B=\max\left\{x,\dfrac{1}{y}\right\}+\max\left\{y,\dfrac{2}{z}\right\}+\max\left\{z,\dfrac{3}{x}\right\}$ 的最小值是 ________.

4. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 记 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}$, 则对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|+|(1-\lambda)\boldsymbol{d}|+2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{d}|$ 的最小值是 __________.

5. 设实数 a_1,a_2,a_3,a_4 满足 $a_1a_4-a_2a_3=1$, 记 $f\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_1a_3+a_2a_4$, 则 $f\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ 的最小值是 __________.

三角函数

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别是 $a,b,c,a^2=b^2+2bc\cos B$.

(1) 证明: $\sin(A-B)=\sin 2B$;

(2) 求角 B 的取值范围.

数列

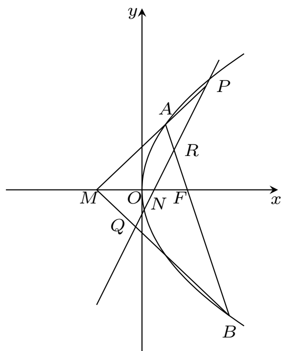
1. 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1,\left(2a_{n+1}-a_n\right)^2=4\left(b_{n+1}-b_n\right)$, 其中 $n\in\mathbb{N}^*$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $5a_2=S_3+3$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

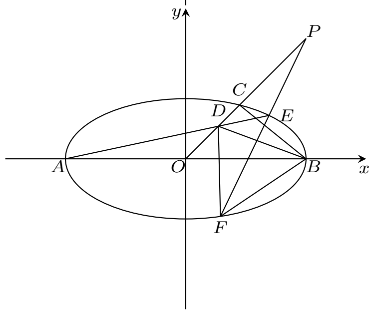
(2) 若 $a_n\geqslant 0,n\in\mathbb{N}^*$, 证明: $S_n\leqslant b_n+n,n\in\mathbb{N}^*$.

解析几何

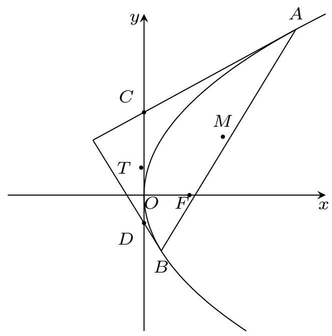
1. 如图, 已知 F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点, M 是抛物线的准线与 x 轴的交点, $|MF|=2$.
(1) 求抛物线的方程;
(2) 设过点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点, 若斜率为 2 的直线 l 与直线 MA,MB,AB,x 轴依次交于点 P,Q,R,N, 且满足 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$, 求直线 l 在 x 轴上截距的取值范围.



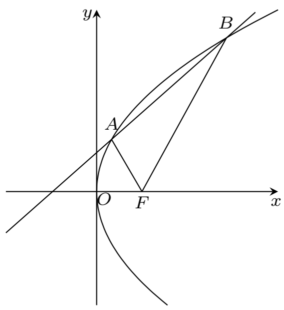
2. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A,B, 点 P 的坐标是 $(2,2)$, 线段 OP 交椭圆于点 C,D 在线段 OC 上 (不包括端点) . 延长 AD 交椭圆于点 E, 延长 PE 交椭圆于点 F. 记 S_1,S_2 分别为 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BDF$ 的面积.
(1) 求 $|OC|$ 的值;
(2) 求 $S_1\cdot S_2$ 的最大值.



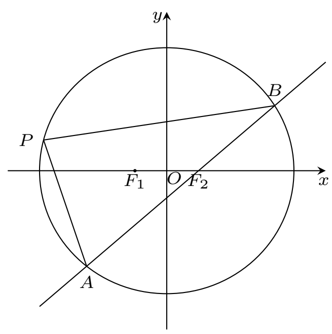
3. 如图, 已知抛物线 $\Gamma: y^2=4x$, 焦点为 F, 过 Γ 外一点 Q (不在 x 轴上), 作 Γ 的两条切线, 切点分别为 A,B, 直线 QA,QB 分别交 y 轴于 C,D 两点, 记 $\triangle QAB$ 的外心为 $M,\triangle FCD$ 的外心为 T.
(1) 若 $|AF|=5$, 求线段 CF 的长度;
(2) 当点 Q 在曲线 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1(x<0)$ 上运动时, 求 $\overrightarrow{TF}\cdot\overrightarrow{TM}$ 的最大值.



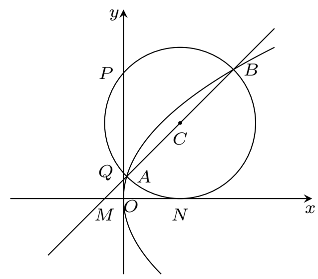
4. 如图, 已知点 $F(1,0),A,B$ 为抛物线 $y^2=4x$ 上不同的两点 (B 在 A 的右上方, F 在直线 AB 的下方), 满足 $\angle BAF=\angle AFO+45^\circ$.
(1) 证明: A,B 的中点 C 位于某定直线上;
(2) 记 $\triangle ABF$ 的内切圆、外接圆的半径分别为 r,R, 求 $\dfrac{R}{r}$ 的最小值.



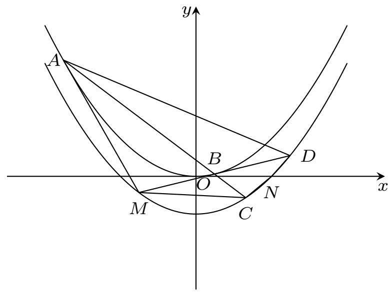
5. 如图, 椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 e,F_1,F_2 分别是其左、右焦点, 过 F_2 的直线 l 交椭圆于点 A,B,P 是椭圆上不与 A,B 重合的动点, O 是坐标原点.
(1) 若 O 是 $\triangle PAB$ 的外心, $\angle PAB=\dfrac{\pi}{4}$, 求 e 的值;
(2) 若 F_1 是 $\triangle PAB$ 的重心, 求 e 的取值范围.



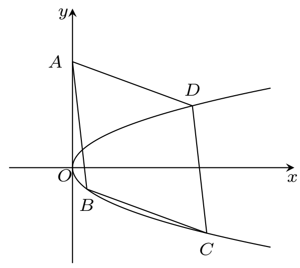
6. 如图, 已知抛物线 $y^2=4x$, 斜率为正的直线交抛物线于 A,B 两点, 交 x 轴的负半轴于点 M, 以 AB 为直径的圆 C 与 x 轴相切于点 N, 交 y 轴于点 P,Q.
(1) 求抛物线的准线方程;
(2) 求 $|MN|\cdot|PQ|$ 的最大值.



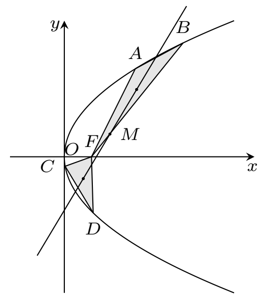
7. 如图, 设抛物线 $E_1:x^2=4y, E_2:x^2=4y+4$. 点 M 是第三象限内抛物线 E_2 上的动点, N 是抛物线 E_2 与 x 轴正半轴的交点. 过点 M 作抛物线 E_1 的两条切线, 记切点分别为 A,B, 射线 AB,MB 分别与抛物线 E_2 交于点 C,D, 且点 C 在第四象限内.
(1) 证明: $|BD|=|BM|$;
(2) 求五边形 $AMCND$ 面积的最大值.



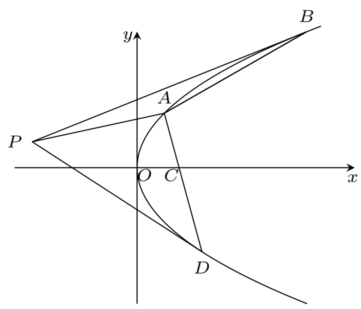
8. 如图, A 点在 y 轴正半轴上, 抛物线 $y^2=x$ 上有三个不同的点 B,C,D, 使得四边形 $ABCD$ 是菱形, C 点在第四象限.
(1) 若 B 点与坐标原点重合, 求菱形 $ABCD$ 的面积;
(2) 求 $|OA|$ 的最小值.



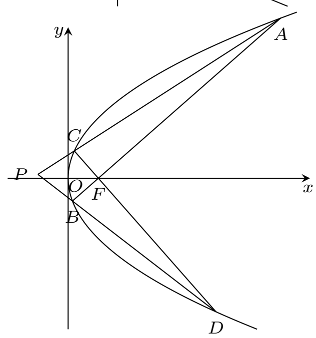
9. 如图, 抛物线 $y^2=4x$ 上有四个不同的点 A,B,C,D, 满足 $AB=CD=2, F$ 是抛物线的焦点.
(1) 求 F 点的坐标与 AF 的最小值;
(2) 记 G_1,G_2 分别为 $\triangle FAB,\triangle FCD$ 的重心, M 是 G_1G_2 的中点. 若直线 G_1G_2 的斜率为 $\dfrac{16}{15}$, 求 M 点纵坐标的取值范围.



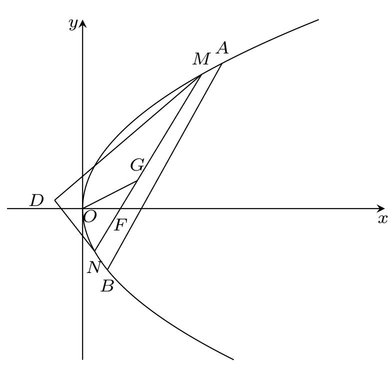
10. 如图, 点 $A(1,2)$. B 是抛物线 $y^2=4x$ 上一点, 且在 A 点的右上方. 在 x 轴上取一点 C, 使得 $2\angle ACO=\angle BAC+45^\circ$. 射线 AC 交抛物线于 D 点, 抛物线在两点 B,D 处切线交于点 P.
(1) 若 $AB\perp AC$, 求 B 点的坐标;
(2) 记 $\triangle PAD$ 面积为 $S_1,\triangle PAB$ 面积为 S_2. 求 S_1-S_2 取最大值时, 点 P 的坐标.



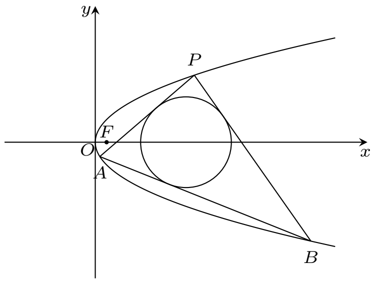
11. 如图, 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过 F 作抛物线两条互相垂直的弦 AB,CD, AC 与 BD 交于 P.
(1) 求 $|PF|$ 的取值范围;
(2) 记直线 AC, 直线 BD 与 y 轴所围成的三角形面积为 S, 求 S 的最小值.



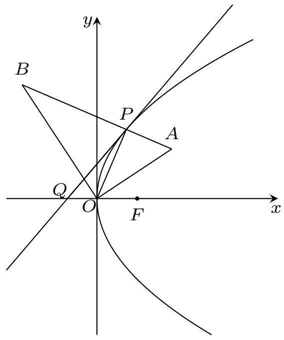
12. 如图, 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 $AB: y-\dfrac{7}{2}=k\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$, 与抛物线交于 A,B 两点, G 为三角形 OAB 的重心, 直线 GF 与抛物线交于 M,N 两点.
(1) 若 $k\geqslant 1$, 求直线 OG 斜率的取值范围;
(2) 若 $\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant 2$, D 为半椭圆 $x=-\sqrt{1-9y^2}$ 上一点, 求 $\triangle DMN$ 面积的取值范围.



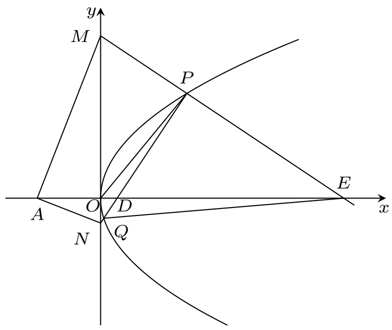
13. 如图, 点 $P(s,t)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的动点, F 是抛物线的焦点, 当 $s=1$ 时, $|PF|=\dfrac{5}{4}$.
(1) 求抛物线的解析式;
(2) 过点 P 作圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$ 的切线, 分别交抛物线于 A,B 两点, 当 $t>1$ 时, 求 $\triangle PAB$ 面积的最小值.



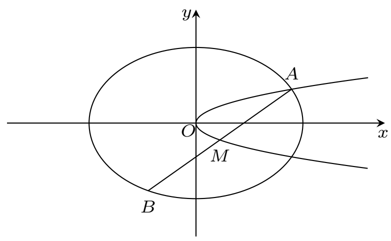
14. 如图, 点 P 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的动点, F 是抛物线的焦点, 过 P 作抛物线的切线, 交 x 轴于 Q 点, 分别作 $\angle POF,\angle POQ$ 的角平分线交过 P 点 OP 的垂线于 A,B 两点.
(1) 若 $P(2,3)$, 求 $|PQ|$ 的值;
(2) 若 $|PQ|=2$, 求 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最小值, 以及此时 F 点的坐标.



15. 如图, 已知点 P 是抛物线 $C: y^2=4x$ 上位于第一象限的点, 点 $A(-2,0)$, 点 M,N 是 y 轴上的两个动点 (点 M 位于 x 轴上方), 满足 $PM\perp PN, AM\perp AN$, 线段 PN 分别交 x 轴正半轴、抛物线 C 于点 D,Q, 射线 MP 交 x 轴正半轴于点 E.
(1) 若四边形 $ANPM$ 为矩形, 求点 P 的坐标;
(2) 记 $\triangle DOP,\triangle DEQ$ 的面积分别为 S_1,S_2, 求 $S_1\cdot S_2$ 的最大值.



16. 如图, 已知椭圆 $C_1: \dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, 抛物线 $C_2: y^2=2px(p>0)$, 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点. 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B, 交抛物线 C_2 与点 $M(B,M$ 不同于 $A)$.
(1) 若 $p=\dfrac{1}{16}$, 求抛物线 C_2 的焦点坐标;
(2) 若存在不过原点的直线 l 使 M 是线段 AB 的中点, 求 p 的最大值.



导数

1. 设 a,b 为实数, 且 $a>1$, 函数 $f(x)=a^x-bx+\mathrm{e}^2(x\in\mathbb{R})$.

   (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

   (2) 若对于任意 $b>2\mathrm{e}^2$, 函数 $f(x)$ 均有两个不同零点, 求实数 a 的取值范围;

   (3) 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 证明: 对于任意 $b>\mathrm{e}^4$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$, 满足

   $$x_2>\frac{b\ln b}{2\mathrm{e}^2}x_1+\frac{\mathrm{e}^2}{b}.$$

   注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

2. 已知函数 $f(x)=\ln x+a\left(\dfrac{5}{4x}+\dfrac{1}{4}\right),a>0$.

   (1) 当 $f(x)$ 的最小值是 $\dfrac{6}{5}$ 时, 求 a 的值;

   (2) 当 $a<2-\sqrt{3}$ 时, 记函数 $f(x)$ 的两个零点分别是 x_1,x_2, 证明: $\sqrt{x_1^2+x_2^2+3}>2-a$.

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-mx$ 有两个不同的零点 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2$.

   (1) 求实数 m 的取值范围;

   (2) 若不等式 $xf(x)+mx^2+x\geqslant k\left(\mathrm{e}^x-1\right)$ 对任意的 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立, 求实数 k 的最大值;

   (3) 求证: $x_1+x_2>3-\dfrac{\mathrm{e}}{m}$.

4. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

   (1) 证明: $f'(x)>1+\dfrac{1}{x}$;

   (2) 当 $f(1)>\mathrm{e}$ 时, 证明: 函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 恰有两个极值点.

5. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+b)^3-cx^2$, 其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$.

   (1) 当 $b=0$ 时, 若 $f(x)$ 的最小值是 0, 求 $a+c$ 的最大值;

   (2) 当 $a=\dfrac{1}{3},c=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时, 若 $f(x)$ 有唯一极值点, 求 b 的取值范围.

   注: 本题结果可保留超越方程的实数根, 如 b 的取值范围是 $[x_0,3]$, 其中 x_0 是方程 $x+\ln x=0$ 的实数根.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},x>0$.

   (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

   (2) 若关于 t 的方程 $t^{t+a}=a^{2t}(a>0,a\neq1)$ 恰有三个实数根 $t_1,t_2,t_3(t_1<t_2<t_3)$, 且 $t_1+t_3<20$, 求 a 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x)=3x(x-1)-2\ln x+\dfrac{1}{x}-1$.

   (1) 证明: $f(x)\geqslant0$;

   (2) 证明: $\dfrac{1}{6}f(n+1)>\dfrac{1}{\tan\frac{1}{1}}+\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\tan\frac{1}{n}}\,(n\in\mathbb{N}^*)$.

8. 已知函数 $f(x)=\left(ax^2-2x+b\right)\mathrm{e}^{ax+c}-ax$, 其中 $a>0$.

   (1) 当 $a=1,b=3,c=0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

   (2) 若 $f(x)$ 有 2 个零点和 3 个极值点, 证明: $ab<1+\dfrac{4}{\mathrm{e}^3}$.

9. 已知函数 $f(x)=\log_2 x-\sqrt{x}$.

(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;

(2) 若存在 $0<x_1<x_2$, 满足 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\left(x_2-x_1\right)^2$, 证明: $x_2>\dfrac{3}{2}$.

10. 已知实数 $a\neq 0$, 设函数 $f(x)=\ln x+x^a-\mathrm{e}^a$.

(1) 若函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_a, 且 $x_a>1$, 证明: x_a 随着 a 的增大而增大;

(2) 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 若对任意满足 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ 的正实数 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$, 均有 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{x_0}$, 求 a 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-a(a\in\mathbb{R})$ 有两个零点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $1-a<x_1+x_2<\dfrac{2}{3}(1-a)$;

(3) 证明: $x_1^2+x_2^2<(a+3)(a-1)$.

12. 已知实数 $a\neq 0$, 设函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}-\ln^2 x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$, 证明: $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{2\left(x_1-x_2\right)}-\mathrm{e}^2\left(x_1+x_2\right)+2\mathrm{e}>0$;

(2) 若不等式 $f(x)\geqslant 2a-\dfrac{x}{a}$ 对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

13. (1) 当 $-\dfrac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant 0$ 时, 证明: $x\mathrm{e}^x\geqslant\sin x+\cos x-1$;

(2) 若 $x\geqslant-\dfrac{5\pi}{4}$ 且 $x\neq 0$ 时, 有 $\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\dfrac{\sin x+\cos x-1}{x\mathrm{e}^x}-a\right)<0$, 求 a 的取值范围.

14. 已知函数 $f(x)=\ln x$.

(1) 求证: 当 $x\geqslant 1$ 时, $f(x)\leqslant\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(2) 设 $g(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}+af(x)-\dfrac{\sqrt{x}}{a}$, 若 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

参考数据: $\ln 2=0.693\cdots$, $\sqrt{\mathrm{e}}=1.65\cdots$.

15. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin x, 0<x<\dfrac{\pi}{4}$, 正数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$, 且当 $n\geqslant 2$ 时, $f\left(a_n\right)=a_{n-1}$.

(1) 证明: 数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减;

(2) 证明: 当 $n\geqslant 2$ 时, $a_{n-1}<a_n+\dfrac{1}{2}a_n^2$;

(3) 证明: 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k>\ln\dfrac{(n+5)(n+4)}{20}$.

16. 已知函数 $f(x)=x\ln x+ax+b$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 只有一个零点, 求 a,b 所需要满足的条件;

(2) 若 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\left(x_1\neq x_2\right)$, 有 $x_1+x_2+k\sqrt{x_1x_2}<(2+k)\mathrm{e}^{-a-1}$ 恒成立, 求正实数 k 的最小值.

17. 已知函数 $f(x)=\cos 2x-4\cos x-2kx+7$, 其中 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi, k\in\mathbb{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 0 , 求 k 的值;

(2) 若 $m\in[0,1]\cup[2,+\infty), n\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, 求证: $m(1-\cos n)^2+\cos(mn)\geqslant 1$.

18. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 函数 $f(x)=a^{x}+a^{\frac{1}{x}}, g(x)=k-\ln x-\dfrac{k}{x}$.

(1) 讨论函数 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若对任意 $x\in(-\infty,0)$, 都有 $f(x)\leqslant\dfrac{2}{a}$, 求 a 的取值范围.

19. 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 若存在 $k\in D$, 使得 $f'(k)=f(k)$, 且 $x=k$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则称函数 $f(x)$ 为 “极致 k 函数” .

(1) 设函数 $f(x)=x+a\tan x$, 其中 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, a\in\mathbb{R}$.

(a) 若 $f(x)$ 是单调函数, 求 a 的取值范围;

(b) 证明: 函数 $f(x)$ 不是 “极致 0 函数” ;

(2) 对任意 $m\in\mathbb{R}$, 证明: 函数 $g(x)=x\sin x+m\cos x-m$ 是 “极致 0 函数” .

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\cos x-\sin x-1$.

(1) 当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 时, 证明: $f(x)\geqslant 0$;

(2) 设 x_n 为函数 $f(x)$ 在区间 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n\in\mathbb{N}^{*}$.

(a) 证明: $x_{n+1}-x_n>2\pi$;

(b) 证明: $\mathrm{e}^{x_n-2n\pi-\frac{\pi}{2}}-\dfrac{x_n}{2}+n\pi>\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$.

21. 已知函数 $f(x)=1+k\left(\ln x-\dfrac{1+\ln x}{x}\right)(k\neq 0)$.

(1) 若 $f(x)$ 存在最大值 M, 证明: $M+k>1$;

(2) 在 (1) 的条件下, 设函数 $g(x)=x\mathrm{e}^{x+\frac{M-1}{k}}-x$, 求 $g(x)$ 的最小值 (用 M,k 的代数式表示).

22. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}-b$, 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$.

(1) 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若对任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $(x-1)f(x)\geqslant 0$, 求实数 a 和 b 所满足的关系式, 并求实数 a 的取值范围.

23. 设函数 $f(x)=x^{n}\ln x$, 其中 $n>1$, 直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线.

(1) 求直线 l 的方程, 并求 l 在 y 轴上的截距的最大值;

(2) 若直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 有两个不同的交点, 求 x_0 所需要满足的条件.

24. 设 $a\geqslant\mathrm{e}$, 函数 $f(x)=\log_a x$ 图像上三个不同的点 $M(m,\log_a m), N(n,\log_a n), L(1,0)$, 满足 $|ML|=|NL|$.

(1) 证明: 线段 MN 的中点在第四象限;

(2) 证明: 直线 MN 的斜率大于 $\log_a\mathrm{e}$.

25. 设函数 $f(x)=\ln x$, 其图像上不同的两点 $A(a,\ln a), B(b,\ln b)$, 满足直线 AB 的纵截距大于 0 .

(1) 证明: $ab>\mathrm{e}^{2}$;

(2) 证明: 直线 AB 的斜率小于 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

26. 已知函数 $f(x)$ 图像上任意不同的两点 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$, 设 $f(x)$ 图像在点 A, B 处的切线交于点 $C\left(x_c, y_c\right)$, 若满足 $y_c<f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则称函数 $f(x)$ 为 “优质函数” .

(1) 证明: 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 是 “优质函数” ;

(2) 设函数 $h(x)=x-k \ln x$, 其中 $k \neq 0$, 若函数 $h(x)$ 为 “优质函数” , 求 k 的取值范围.

27. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a}-\ln (a x+1)$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x>0$ 时, 证明: $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\frac{x \sin x}{2}}>x$.

28. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2} a x^2-x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 求 a 的值;

(2) 当 $a>1$ 时,

(a) 证明: $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2\left(x_1<x_2\right)$, 且 x_2-x_1 随 a 增大而增大;

(b) 证明: $f\left(x_2\right)<1+\dfrac{\sin x_2-x_2}{2}$.

29. 已知函数 $f(x)=\ln (a x+1), g(x)=(x-1) \mathrm{e}^{a x}+1$.

(1) 讨论 $g(x)$ 的最值情况;

(2) 当 $a>0$ 时, 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 存在公切线, 求 a 的取值集合.

30. 已知函数 $f(x)=\min \left\{(x+1) \ln (x+1)-x, \dfrac{x^2}{2}+\sin x-x\right\}$.

(1) 证明: $f(x) \geqslant 0$;

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 有且仅有一个分段点.

31. 设函数 $g(x)=(x+2) \ln (x+1)-2 x-a$ 在区间 $(0,1)$ 上零点为 x_1.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 对每一个 x_1, 是否存在实数 b 使得 $h(x)=\left(x^2+x\right) \ln \left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{2} a x^2-x+b$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上总存在零点为 x_2, 且 $x_1 x_2<1$, 请说明理由.

32. 已知函数 $f(x)=\sin x+a(x+1) \ln (x+1)-(a+1) x$, 其中 $a>0$. 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$.

(1) 若 $g(x)$ 在 $\left(-1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极值点 x_0,

(a) 求 a 的取值范围;

(b) 证明: $g\left(x_0\right)<\dfrac{a x_0}{2}$;

(2) 证明: 存在 $a \in(1,2)$, 使得 $f(x) \geqslant 0$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 内恒成立, 且 $g(x)=0$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 内有且仅有两个解.

参考数据: $\mathrm{e}=2.71828 \cdots, \pi=3.14159 \cdots$.

33. 已知函数 $f(x)=(\ln x+a) x^3-\dfrac{3 a+1}{2} x^2+b x+c\left(a \geqslant-\dfrac{1}{3}\right)$.

(1) 若 $a=-\dfrac{1}{3}, b=0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同的极值点, 分别记两个极值点为 x_1, x_2, 求 x_1+x_2 的取值范围.

34. 已知实数 $a \in \mathbb{R}$, 设函数 $f(x)=(x+a)^2\mathrm{e}^x-ax, x\in\mathbb{R}$.

(1) 若 $a=0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若方程 $f(x)=0$ 有唯一实根 x_0, 求实数 x_0 的取值范围.

35. 已知 a 是正整数, 函数 $f(x)=ax-\sqrt{a(a-1)x^2+a}-\ln x(x>0)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求 a 的最大值, 使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

参考数据: $\ln 3=1.0986\cdots$, $\sqrt{2}=1.4142\cdots$.

36. 已知函数 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-ax^2(x>0)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 为单调递增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2, 且 t_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

(a) 求实数 a 的取值范围;

(b) 求证: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{t_0+1}>1$.

37. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+|\ln(x-b)|}{a+1}(x>b, a, b>0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\left|\ln\left(x_n-\dfrac{1}{2}\right)\right|+\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, 且对任意正整数 $n, x_n\neq\dfrac{1}{2}$, 求证: $x_1+x_2+\cdots+x_{2021}\geqslant 1010+\dfrac{2020}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

38. 已知函数 $f(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^x$.

(1) 若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有三个不同的解, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若实数 m, n 满足 $m+n=f(-2)$, 其中 $m>n$, 分别记: 关于 x 的方程 $f(x)=m$ 在 $(-\infty, 0)$ 上两个不同的解为 x_1, x_2; 关于 x 的方程 $f(x)=n$ 在 $(-2,+\infty)$ 上两个不同的解为 x_3, x_4. 求证: $|x_1-x_2|>|x_3-x_4|$.

注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

39. 已知函数 $f(x)=\ln\left(kx+\sqrt{1+x^2}\right)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的定义域和单调性;

(2) 若 $f(x)\geqslant k\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

40. 已知正实数 x, y 满足 $x^xy^y=1$.

(1) 若 $x\geqslant y\geqslant\dfrac{1}{2}$, 证明: $1\leqslant\left|\dfrac{y-1}{x-1}\right|\leqslant 2$;

(2) 若 $\lambda\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{x+y}\leqslant\lambda+1$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

41. 已知函数 $f(x)=x^x(x>0)$.

(1) 记函数 $g(x)=f(x)+\ln[f(x)]$, 求 $g(x)$ 的最小值;

(2) 若 $a\in(0,1]\cup[4,+\infty)$, 证明: 对任意实数 $x\in(0,a)$, 都有 $f(x)+f(a-x)\geqslant 2x^2-2ax+a^2$.

42. 记 $f_a(x)=ax(x-1)+\ln x$.

(1) 若 $f_a(x)\leqslant 0$ 对任意的 $x>0$ 但成立, 求实数 a 的值;

(2) 若直线 $l: y=kx+1$ 与 $f_a(x)$ 的图像相切于点 $Q(m,n)$.

(a) 试用 m 表示 a 与 k;

(b) 若对给定的 k, 总存在三个不同的实数 a_1,a_2,a_3 使得直线 l 与曲线 $f_{a_1}(x),f_{a_2}(x),f_{a_3}(x)$ 同时相切, 求实数 k 的取值范围.

43. 已知函数 $f(x)=|x+1|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},a$ 为实数.

(1) 若 $f(x)=a$ 恰有三个解, 求 a 的范围;

(2) 若 a 取上述范围, 设三个解分别为 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1<x_2<x_3$, 求证: $x_1+x_3>x_2$.

44. 已知实数 $m>0$, 函数 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{m}+m\right)$.

(1) 函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}\ln x$, 求 $g(x)$ 的最小值;

(2) 若方程 $f(x)=x$ 有两个解 $x_1,x_2\,(x_1\neq x_2)$, 求函数 $G(m)=(x_1-x_2)\left(|x_1|-|x_2|\right)$ 的值域.

45. 已知函数 $f(x)=\left(ax^2+1\right)\mathrm{e}^{x+b}-x$, 其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数.

(1) 已知 $(a+1)^2+b^2=0$, 若 $f(x)\leqslant 1$, 求 x 的取值范围;

(2) 若 $ab=1,f(x)$ 存在最小值, 且最小值为 k.

(a) 若 $k=5$, 求 b 的值;

(b) 证明: $k>1$.

46. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x},g(x)=ax+b$.

(1) 若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $b=0$ 时, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有两个交点 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$, 试比较 x_1x_2 与 $2\mathrm{e}^2$ 的大小.

参考数据: $\mathrm{e}=2.71\cdots$, $\ln 2=0.69\cdots$, $\sqrt{2}=1.4\cdots$.

47. 已知函数 $f(x)=x^2-a,g(x)=\ln x$, 其中 $a>\dfrac{1+\ln 2}{2}$. 记函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像的两个交点的横坐标分别为 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$.

(1) 证明: 存在 $x_0\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'\left(\dfrac{x_1+x_0}{2}\right)=g'\left(\dfrac{x_0+x_2}{2}\right)$;

(2) 若 $\left(x_1+x_2\right)^2-\lambda\left(x_1-x_2\right)^2\geqslant 2$ 恒成立, 求 λ 的最大值.

48. 记 $f(x)=x-\ln x-c(c>1)$. 设 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的两个零点 $(x_1\neq x_2)$.

(1) 证明: $x_1x_2>\mathrm{e}^{2-2c}$;

(2) 证明: $x_1+x_2<c+\sqrt{c}$.

49. 已知 $a,b\in\mathbb{R}$, 函数 $f(x)=\ln^2 x+ax^2+bx,x>0$.

(1) 当 $a=0,b=2\mathrm{e}$ 时, 证明: $f(x)\geqslant 3$;

(2) 若函数 $f(x)$ 有三个不同的极值点 $r,s,t(r<s<t)$,

(a) 求 b 的取值范围;

(b) 证明: $f(s) > -\dfrac{5}{4}$.

50. 已知函数 $f(x)=2x\ln x-ax^2-\dfrac{\mathrm{e}}{x}(a\in\mathbb{R})$.

(1) 证明: 当 $a<0$ 时,$f(x)$ 只有一个零点;

(2) 证明: 当 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2 时, 有 $\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{2}>\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

参考数据: $\mathrm{e}=2.7182\cdots$, $\ln 2=0.69\cdots$.

51. 若不等式 $x^2-ax-\ln x+\mathrm{e}^{\sin x}-1>0$ 对 $x>0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

52. 已知函数 $f(x)=x^2-2x\ln|x|-ax-1, a\in\mathbb{R}$.

(1) 证明: $f(x)$ 有两个不同的零点;

(2) 若 $a\geqslant 0$, 记函数 $f(x)$ 的两个零点为 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$, 满足 $x_2\cdot(-x_1)^m\geqslant 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

53. 已知函数 $f(x)=x^a-a\ln x(a\in\mathbb{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 证明: $a>1$ 时, 存在 $x_1<x_2<x_3$ 使得 $f(f(x_k))=f(x_k)$ 对 $k=1,2,3$ 均成立, 且 $x_2-x_3>\ln x_1$.

54. 已知 $0<a\leqslant\mathrm{e}^2$, 设函数 $f(x)=(x+a)\ln x, g(x)=x\ln(x+a)$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $x_1,x_2>1$, 且 $f\left(x_1^2\right)=g\left(x_1\right),\left[f\left(x_2\right)\right]^2=g\left(x_2\right)$, 证明:

(a) $x_1<\sqrt{\mathrm{e}}$;

(b) $x_2>x_1$.

注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

55. 已知实数 $a\neq 0$, 设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}, x>0$.

(1) 当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$ 均有 $f(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围.

注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

解析

选择题

1. 2021 年 10 月集英苑线上模拟考试.
2. 2021 年 7 月水球高考研究组方向性测试四.
3. 2016 年浙江高考.

填空题

1. 2021 年 5 月五校联考.
2. 2021 年 10 月集英苑线上模拟考试.
3. 2020 年 3 月温州中学月测卷.
4. 2020 年 10 月水球高考研究组方向性测试一.
5. 2017 年 5 月五校联考.

三角函数

1. 2021 年 7 月水球高考研究组方向性测试四.

数列

1. 2021 年 10 月集英苑线上模拟考试.

解析几何

1. 2021 年浙江高考.
2. 2020 年 10 月水球高考研究组方向性测试一.
3. 2020 年镇海中学高二模拟卷.
4. 2020 年 10 月宁海中学高三第三次模拟卷.
5. 2021 年 2 月水球高考研究组方向性测试二.
6. 2021 年 7 月水球高考研究组方向性测试四.
7. 2021 年 5 月水球高考研究组方向性测试三.
8. 2021 年 5 月数海漫游第二次模拟卷.
9. 2021 年 4 月数海漫游第一次模拟卷.
10. 解析几何难题汇总.
11. 解析几何难题汇总.
12. 解析几何难题汇总.
13. 解析几何难题汇总.
14. 解析几何难题汇总.

15. 2022 年 1 月宁波十校高三期末考试.
16. 2020 年浙江高考.

导数

1. 2021 年浙江高考.
2. 2020 年 4 月数海漫游模拟卷.
3. 2021 年 5 月杭二中高三仿真卷.
4. 2021 年 2 月水球高考研究组信心提升卷.
5. 2020 年 10 月水球高考研究组方向性测试一.
6. 导数闯关练习.
7. 导数闯关练习.
8. 导数闯关练习.
9. 导数闯关练习.
10. 2021 年 2 月水球高考研究组方向性测试二.
11. 导数闯关练习.
12. 2019 年 5 月镇海中学高三仿真卷.
13. 导数压轴 20 题.
14. 导数压轴 20 题.
15. 导数压轴 20 题.
16. 导数压轴 20 题.
17. 导数压轴 20 题.
18. 导数压轴 20 题.
19. 导数压轴 20 题.
20. 导数压轴 20 题.
21. 导数压轴 20 题.
22. 导数压轴 20 题.
23. 导数压轴 20 题.
24. 导数压轴 20 题.
25. 导数压轴 20 题.
26. 导数压轴 20 题.
27. 导数压轴 20 题.
28. 导数压轴 20 题.
29. 导数压轴 20 题.
30. 导数压轴 20 题.

31. 导数压轴 20 题.
32. 导数压轴 20 题.
33. 2020 年 2 月温州中学高三期末检测卷.
34. 2021 年 5 月数海漫游第二次模拟卷.
35. 周利军老师原创.
36. 2020 年 4 月绍兴一模测试卷.
37. 2020 年 3 月温州中学月测卷.
38. 2019 年 4 月台州高三模拟卷.
39. 2021 年 5 月温州中学高三仿真卷.
40. 2020 年 4 月数海漫游模拟卷二.
41. 2021 年 4 月数海漫游第一次模拟卷.
42. 2019 年 2 月温州二模测试卷.
43. 2020 年浙江省数学竞赛预赛.
44. 2021 年 2 月数海漫游迎辛丑年线上联考卷.
45. 2020 年 8 月数海漫游线上模拟卷.
46. 2020 年 11 月学军中学高三期中检测卷.
47. 2020 年 5 月数海漫游模拟卷三.
48. 2021 年 2 月镇海中学高三模拟卷.
49. 2021 年 7 月水球高考研究组方向性测试四.
50. 2021 年 9 月浙江省新高考研究卷五.
51. 2021 年学军西溪高三周末练四.
52. 2021 年 12 月 T8 联考导数预测题.
53. 2021 年 11 月数海漫游第一次模拟卷.
54. 2021 年 10 月集英苑线上模拟考试.
55. 2019 年浙江高考.